Revision Rapide

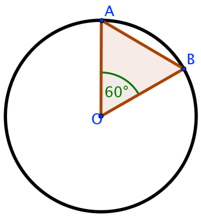
Géométrie 3ème

Méthodes et Bonnes Pratiques

l'Essentiel en géométrie pour la préparation du BEPC

Bien rédiger sa démonstration

Exemple :



Construit un cercle de centre O et marque sur ce cercle 2 points A et B tels que l'angle AOB soit égal à 60°.
Démontre que le triangle IJK est équilatéral

Méthode :

✓ On écrit les hypothèses :

‣ A et B étant des points du cercle de centre O, OA et OB sont donc des rayons de ce cercle. on a : OA = OB

‣ L'angle en O du triangle AOB a une mesure de 60°

✓ On écrit la propriété ou la définition précédé d'un <u>or</u> :

‣Or si un triangle a deux cotés de même mesure et un angle de 60° alors ce triangle est équilatéral.

✓ On donne la conclusion

Donc le triangle OAB est un triangle équilatéral

Remarques :

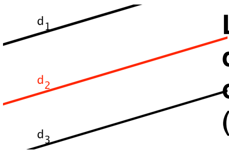
✓ Les hypothèses peuvent être des données directes de l'exercice (codage de la figure ou dans l'énoncé) ou être déduites des données par interprétations

✓ Les hypothèses ne doivent pas provenir de mesures avec des instruments ou de l'apparence de la figure

✓ La citation de la propriété ou de la définition utilisée n'est pas obligatoire : Il suffit juste avant de tirer la conclusion de faire une référence à cette propriété en utilisant (d'après la propriété de Pythagore ou bien d'après la définition du rectangle, ou bien d'après une propriété des triangles isocèles).

prouver que 2 droites sont parallèles

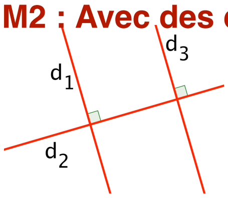
M1 : Avec des droites parallèles



Les données nous permettent de dire que (d_1) // (d_2) et que (d_3) // (d_2). on peut donc conclure que : (d_1) // (d_3)

Propriété : Si deux droites sont parallèles à une même troisième alors ces deux droites sont parallèles entre elles.

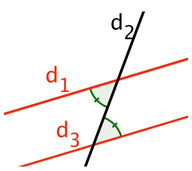
M2 : Avec des droites perpendiculaires



Les données nous permettent de dire que $(d_1)\perp(d_2)$ et que $(d_3)\perp(d_2)$. on peut donc conclure que : (d_1) // (d_3)

Propriété : Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

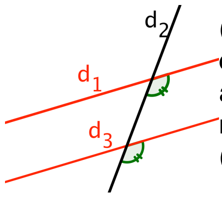
M3 : Avec les angles alternes internes



(d_2) est une sécante commune aux droites (d_1) et (d_3). Nous avons des angles alternes internes de même mesure. Nous concluons donc que : (d_1) // (d_3).

Propriété : Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes - internes de même mesure alors ces deux droites sont parallèles entre elles.

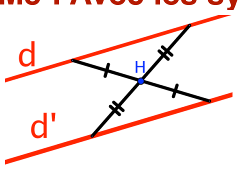
M4 : Avec les angles correspondants



(d_2) est une sécante commune aux droites (d_1) et (d_3). Nous avons des angles correspondants de même mesure. Nous concluons donc que : (d_1) // (d_3).

Propriété : Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux alors elles sont parallèles

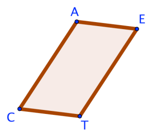
M5 : Avec les symétries



Les données nous permettent de dire que (d) et (d') sont symétriques par rapport au point H. Nous pouvons donc conclure que (d) // (d').

Propriété : Si deux droites sont images l'une de l'autre par une symétrie centrale alors ces deux droites sont parallèles entre elles

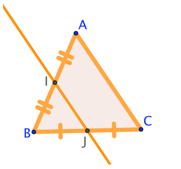
M6 : Avec les parallélogrammes



Les données nous permettent d'affirmer que ETCA est un parallélogramme. Nous concluons donc que (AC)// (ET) et (AE) // (CT)

Propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses cotés opposés sont parallèles

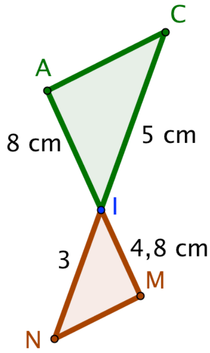
M7 : Avec le théorème des milieux



Les données de l'énoncé nous permettent d'affirmer que dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et que J est le milieu de [BC]. Nous concluons donc que : (IJ)// (AC).

Propriété : Dans un triangle la droite qui joint les milieux de deux cotés est parallèle au troisième coté.

M6 : Avec la réciproque de Thalès



Dans les triangles INM et IAC, la position de A par rapport à IM est la même que celle de C par rapport à IN. De plus on a :

$\frac{IN}{IC} = \frac{3}{5} = 0,6$ et $\frac{IN}{IC} = \frac{3}{5} = 0,6$

On remarque que :

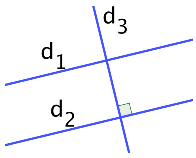
$\frac{IM}{IA} = \frac{IN}{IC} = 0,6$ D'après la réciproque de Thalès, les droites (MN) et (AC) sont parallèles

Propriété : Soit BAC un triangle ; D un point de (BA) et E un point de (BC) tel que les points B, D et A sont alignés dans le même ordre que les points B, E et C.

Si de plus $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}$ alors les droites (DE) et (AC) sont parallèles

prouver que 2 droites sont perpendiculaires

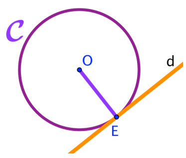
M1 : A partir de droites



Les données nous permettent de dire que (d_1) // (d_2) et que $(d_3) \perp (d_2)$. on peut donc conclure que :
$(d_1) \perp (d_3)$.

Propriété : Si deux droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

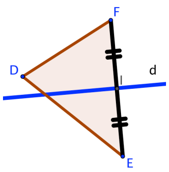
M2 : Avec la définition d'une tangente



Les données nous permettent de dire que (d) est une tangente au cercle C en E. on peut donc conclure que :
(d) ⊥ (OE).

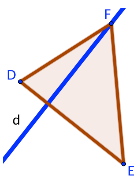
Définition : Soit C un cercle de centre O et M un point du cercle. On appelle tangente au cercle en M, la droite perpendiculaire en M au rayon OM.

M3 : Avec la définition d'une hauteur ou d'une médiatrice



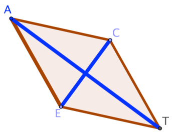
(d) est la médiatrice de [EF]. donc (d) ⊥ (EF).

(d) est la hauteur issue de F donc (d) ⊥ (EF).



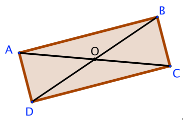
Définitions : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
Dans un triangle La hauteur issue d'un sommet est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au coté opposé à ce sommet.

M1 : A partir de la définition



ACTE est un losange. Donc (AT) ⊥ (CE).

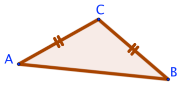
ABCD est un rectangle. Donc (AB) ⊥ (BC).



Propriété : Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires
Les cotés consécutifs d'un rectangle sont perpendiculaires

Montrer qu'un triangle est isocèle

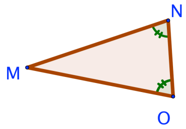
M1 : A partir de la définition



Nous avons avec les données : AC = BC. Nous pouvons donc conclure que le triangle ABC est isocèle en C.

Définition : Un triangle qui a deux cotés de même longueur est un triangle isocèle

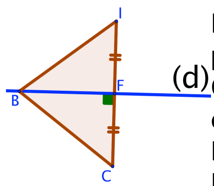
M2 : A partir des angles



Nous avons avec les données que les angles en N et en O sont de même mesure. Nous pouvons donc conclure que le triangle MON est isocèle en M.

Propriété : Un triangle qui possède deux angles de même mesure est un triangle isocèle.

M3 : A partir d'un axe de symétrie

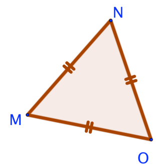


Les données de l'exercice nous permettent de dire que : I est l'image de C par la symétrie d'axe (d). La droite (d) est donc un axe de symétrie du triangle BIC. Nous pouvons donc conclure que BIC est un triangle isocèle en B

Propriété : Un triangle possédant un axe de symétrie est un triangle isocèle

Montrer qu'un triangle est équilatéral

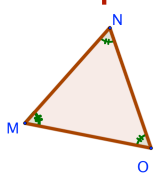
M1 : A partir de la définition



Les données de l'exercice nous permettent de dire que MN = MO = ON. Nous pouvons donc conclure que MON est un triangle équilatéral.

Propriété : Un triangle équilatéral est un triangle qui a 3 cotés de même longueur.

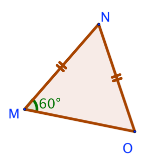
M2 : A partir des angles



Les données de l'exercice nous permettent d'affirmer que les trois angles du triangle sont égaux à 60°. Nous pouvons donc conclure que MON est un triangle équilatéral.

Propriété : Un triangle qui a 3 angles de même mesure égal à 60° est un triangle équilatéral.

M3 : A partir d'une propriété

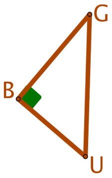


Les données de l'exercice nous permettent d'affirmer que, l'angle en M mesure 60° et que les MN et NO sont de même longueur. Nous pouvons donc conclure que le triangle est équilatéral

Propriété : Un triangle ayant deux cotés de même longueur et un angle de 60° est un triangle équilatéral.

Montrer qu'un triangle est rectangle

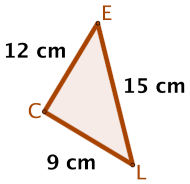
M1 : A partir de la définition



Les données de l'exercice nous permettent d'affirmer que dans le triangle UGB, les cotés UB et GB sont perpendiculaires. Nous pouvons donc conclure que le triangle UGB est rectangle en B.

Propriété : Un triangle dont un des sommets est un angle droit ou dont les supports de deux cotés sont perpendiculaires est un triangle .

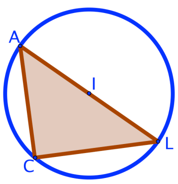
M2 : La réciproque de Pythagore



Avec les données nous avons :
$12^2 + 9^2 = 225$ et $15^2 = 225$.
Soit encore : $CE^2 + CL^2 = EL^2$. Nous pouvons donc conclure que le triangle CLE est rectangle en C.

Propriété : (Réciproque de Pythagore) Si dans un triangle, la somme des carrés des deux plus petits cotés est égale au carré du plus grand coté alors ce triangle est rectangle.

M2 : A partir d'un cercle

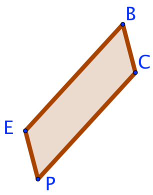


Les données de l'exercice nous permettent de dire que le triangle LAC est inscrit dans le cercle (Ses 3 sommets sont sur le cercle) et son coté LA est un diamètre du cercle. Nous pouvons donc conclure que LAC est un triangle rectangle en C.

Propriété : Si un triangle inscrit dans un cercle a pour coté un des diamètres du cercle alors ce triangle est rectangle et ce coté est son hypoténuse.

Montrer qu'une figure est un parallélogramme

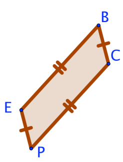
M1 : A partir de la définition



Les données de l'exercice nous permettent de dire que dans le quadrilatère BEPC, le coté EB est parallèle au coté PC et le coté EP est parallèle au coté BC. Nous pouvons donc conclure que le quadrilatère BEPC est un parallélogramme

Propriété : Un quadrilatère dont les cotés opposés sont deux à deux parallèles est un parallélogramme.

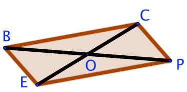
M2 : A partir des longueurs des cotés



Les données de l'exercice nous permettent de dire que les cotés opposés EB et PC d'une part et EP et BC d'autre part ont la même longueur. Nous pouvons donc conclure que BEPC est un parallélogramme

Propriété : Un quadrilatère dont les cotés opposés ont la même longueur est un parallélogramme.

M3 : A partir des diagonales

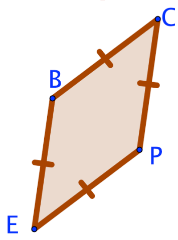


Les données de l'exercice nous permettent de dire que le point O est le milieu des diagonales BP et EC. Nous pouvons donc conclure que BEPC est un parallélogramme

Propriété : Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.

Montrer qu'une figure est un losange

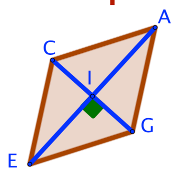
M1 : A partir de la définition



Les données de l'exercice nous permettent de dire que les 4 cotés du quadrilatère BEPC ont la même longueur. Nous pouvons donc conclure que ce quadrilatère est un losange.

Propriété : Un quadrilatère dont les 4 cotés ont la même longueur est un losange.

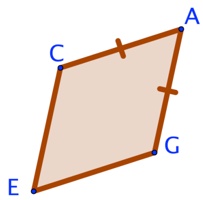
M2 : A partir des diagonales



Nous avons déjà un parallélogramme CAGE et les données nous permettent en plus de dire que ses diagonales CG et AE sont perpendiculaires. Nous pouvons donc conclure que ce parallélogramme est un losange

Propriété : Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

M3 : A partir de cotés consécutifs

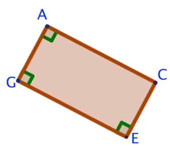


Nous avons déjà un parallélogramme CAGE et les données nous permettent en plus de dire que ses cotés consécutifs AC et AG ont la même longueur. Nous pouvons donc conclure que le parallélogramme CAGE est un losange

Propriété : Un parallélogramme dont 2 cotés consécutifs ont la même longueur est un losange.

Montrer qu'une figure est un rectangle

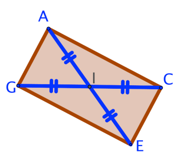
M1 : A partir de la définition



Les données de l'exercice nous permettent de dire que les angles des 3 sommets C, A et G du quadrilatère CAGE sont droits. Nous pouvons donc conclure que ce quadrilatère est un rectangle.

Propriété : Un quadrilatère ayant 3 angles droits est un rectangle.

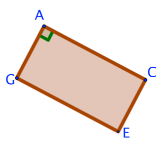
M2 : A partir des diagonales



Nous avons déjà un parallélogramme CAGE et les données nous permettent en plus de dire que ses diagonales CG et AE ont la même longueur. Nous pouvons donc conclure que le parallélogramme CAGE est un rectangle.

Propriété : Un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur est un rectangle.

M3 : A partir des cotés consécutifs

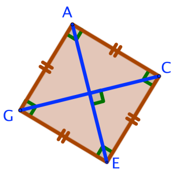


Nous avons déjà un parallélogramme CAGE et les données nous permettent en plus de dire que cotés consécutifs AC et AG sont perpendiculaires. Nous pouvons donc conclure que ce quadrilatère est un rectangle.

Propriété : Un parallélogramme dont 2 cotés consécutifs sont perpendiculaires est un rectangle.

Montrer qu'une figure est un carré

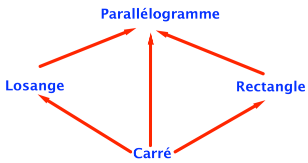
M1 : A partir des propriétés



Les données de l'exercice nous permettent de prouver par une des méthodes précédentes que le quadrilatère CAGE est à la fois losange et rectangle. Nous pouvons donc conclure que ce quadrilatère est un carré.

Propriété : Un quadrilatère à la fois rectangle et losange est un carré

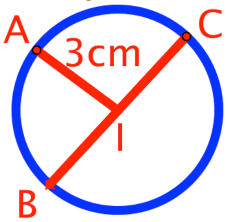
Remarques :



- ✓Les carrés, les rectangles et les losanges sont aussi des parallélogrammes
- ✓ Les carrés sont aussi des losanges
- ✓ Les carrés sont aussi des rectangles

Pour calculer une longueur

M1 : A partir d'un cercle

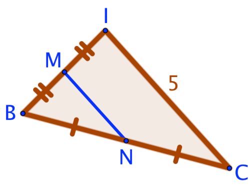


Nous avons un cercle de centre I et de rayon IA = 3 cm. BC étant un diamètre du cercle on a :

$$BC = 2 \times IA$$

Propriété : Le diamètre d'un cercle a une longueur égale au double du rayon.

M2 : A partir de la droite des milieux d'un triangle

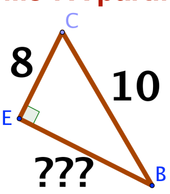


Les données nous permettent de dire que dans le triangle BIC M est le milieu de [BI] et N est le milieu de [BC]. Nous pouvons donc conclure que :

$$MN = \frac{IC}{2} = \frac{5}{2}$$

Propriété : Dans un triangle le segment porté par les milieux de deux cotés a pour longueur la moitié du 3ème coté

M3 : A partir de la propriété de Pythagore



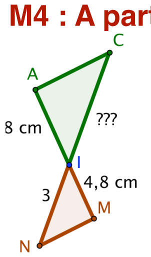
Nous avons un triangle ECB rectangle en E et les longueurs de deux cotés. Nous pouvons donc grâce à la propriété de Pythagore écrire :

$EB^2 + EC^2 = BC^2$ soit $EB^2 = BC^2 - EC^2$

$EB^2 = 10^2 - 8^2 = 36$ soit EB = 6.

Propriété de Pythagore : Dans un triangle rectangle, la somme des carrés des cotés supports de l'angle droit est égale au carré de l'hypothénuse

M4 : A partir de la propriété de Thalès



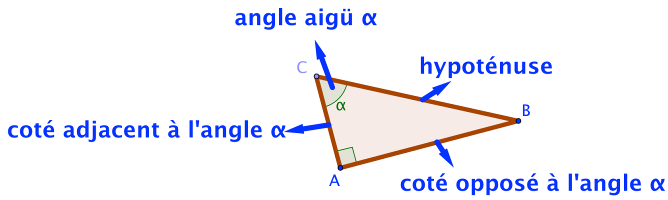
Nous avons 2 triangles avec un sommet en commun et un coté d'un triangle est parallèle à un coté de l'autre triangle. De plus nous connaissons quelques distances. Nous pouvons donc grâce à la propriété de Thalès écrire :

$$\frac{IM}{IA} = \frac{IN}{IC} \Longrightarrow \frac{3}{IC} = \frac{4,8}{8} \text{ soit } IC = \frac{3 \times 8}{4,8} = 5$$

Propriété de Thalès : Soit AIC un triangle ; M un point de (AI) et N un point de (IC) tel que (AC) // (MN). On a :

$$\frac{IM}{IA} = \frac{IN}{IC} = \frac{MN}{AC}$$

M5 : A partir des formules trigonométriques



Nous avons dans l'exercice un triangle rectangle dont nous connaissons la mesure d'un angle aigü et la longueur d'un coté. Nous pouvons alors appliquer une des formules du sinus, du cosinus ou de la tangente.

Propriété : Soit un triangle rectangle et soit α un angle aigü de ce triangle. on a :

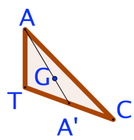
$$\sin\alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}}$$

Ces trois formules sont résumées dans le mot :

SOH CAH TOA

S = Sinus ; C = Cosinus ; T = tangente ; O = Opposé ; A = Adjacent ; H = Hypoténuse

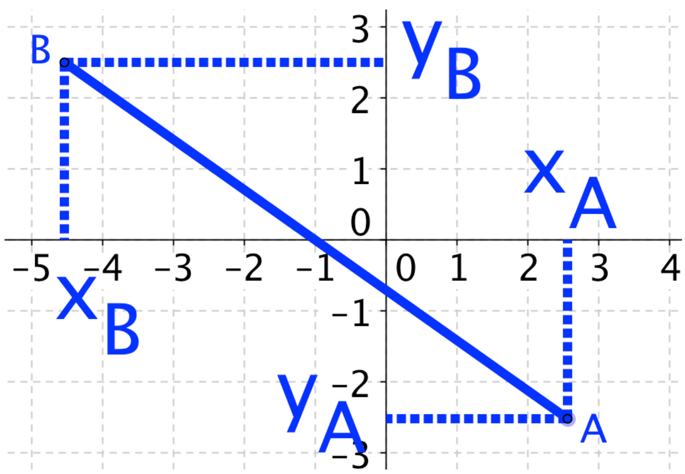
M6 : A partir d'une propriété de la médiane



G est le centre de gravité du triangle et AA' est la médiane issue de A. On a alors :

$$AG = \frac{2}{3}AA'$$

M7 : A partir des coordonnées de points



Nous avons les coordonnées des points A et B dans un repère orthornormé. Nous pouvons donc calculer la distance AB par la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Agence de Consolidation des Technologies de l'Education